IML でも **CML** でもない 直観主義様相論理について

佐藤雄太

第 60 回 MLG 数理論理学研究集会 (神戸大学, 2025/12/20)

神戸大学大学院 システム情報学研究科 情報数理研究室

概要

直観主義様相論理の分野は，それぞれの研究者が「直観主義の様相論理」に求める要素の違いから，IML (Intuitionistic Modal Logic) と CML (Constructive Modal Logic) という二つの勢力に分かれている．

現在，直観主義様相論理の分野全体の状況を俯瞰するようなサーベイを行っている．その過程で遭遇した，どちらの勢力にも属さないような論理について発表する．

cannorin.net/math/mlg60.pdf

目次

古典様相論理 **K** と直観主義論理 **Int**

Intuitionistic Modal Logic と Constructive Modal Logic

IML でも CML でもない論理

古典様相論理 **K** と直観主義論理 **Int**

記法

- 命題変数全体の集合 $\mathrm{PropVar} = \{p, q, \ldots\}$
- $\mathscr{L}_p \coloneqq \mathrm{PropVar} \cup \{\wedge, \vee, \to, \bot\}$
- $\mathscr{L}_{\Box\Diamond} \coloneqq \mathscr{L}_p \cup \{\Box, \Diamond\}$
- $\top$ は $\bot \to \bot$ の略記，$\neg\varphi$ は $\varphi \to \bot$ の略記，
  $\varphi \leftrightarrow \psi$ は $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ の略記とする

K と Int

- **Cl** を古典 (命題) 論理とする
- 直観主義論理 **Int** は **Cl** から排中律を除いて得られる
- 様相論理 **K** は **Cl** に $\mathrm{M}_\Box$, $\mathrm{N}_\Box$, $\mathrm{C}_\Box$, $\mathrm{Dual}_\Box$ を加えて得られる
  - これらの代わりに $\mathrm{M}_\Diamond$, $\mathrm{N}_\Diamond$, $\mathrm{C}_\Diamond$, $\mathrm{Dual}_\Diamond$ を加えてもよい

$\mathrm{M}_\Box$	$\dfrac{\varphi \to \psi}{\Box\varphi \to \Box\psi}$	$\mathrm{M}_\Diamond$	$\dfrac{\varphi \to \psi}{\Diamond\varphi \to \Diamond\psi}$
$\mathrm{N}_\Box$	$\Box\top$	$\mathrm{N}_\Diamond$	$\neg\Diamond\bot$
$\mathrm{C}_\Box$	$(\Box\varphi \land \Box\psi) \to \Box(\varphi \land \psi)$	$\mathrm{C}_\Diamond$	$\Diamond(\varphi \lor \psi) \to (\Diamond\varphi \lor \Diamond\psi)$
$\mathrm{Dual}_\Box$	$\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$	$\mathrm{Dual}_\Diamond$	$\Box\varphi \leftrightarrow \neg\Diamond\neg\varphi$

(後の都合で，K 公理・Nec 規則ではなく上記を使う)

K も **Int** も Kripke 意味論をもつ:

Definition

- $\mathfrak{F} = (W, R)$ は Kripke フレーム
  $:\Longleftrightarrow\ W \neq \emptyset,\ R \subseteq W \times W$
- $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ は Kripke モデル
  $:\Longleftrightarrow\ (W, R)$ が Kripke フレーム，$V : \mathrm{PropVar} \to \mathcal{P}(W)$

K と **Int** では R と V に関する条件が異なり，充足可能性も異なるものを用いる（次頁）.

K では R を任意の関係 $\sqsubset$ とし，V にも特に条件を課さない．

Definition (K-Satisfaction Relation)

$\mathfrak{M} = (W, \sqsubset, V)$ に対し，$\Vdash^{\mathsf{K}}_{\mathfrak{M}}$ を以下で定める:

- $x \Vdash^{\mathsf{K}}_{\mathfrak{M}} p \;\;:\Longleftrightarrow\;\; x \in V(p)$
- $x \Vdash^{\mathsf{K}}_{\mathfrak{M}} \varphi \land \psi \;\;:\Longleftrightarrow\;\; x \Vdash^{\mathsf{K}}_{\mathfrak{M}} \varphi \;\&\; x \Vdash^{\mathsf{K}}_{\mathfrak{M}} \psi$
- ...
- $x \Vdash^{\mathsf{K}}_{\mathfrak{M}} \Box\varphi \;\;:\Longleftrightarrow\;\; \forall y \sqsupset x \, (y \Vdash^{\mathsf{K}}_{\mathfrak{M}} \varphi)$
- $x \Vdash^{\mathsf{K}}_{\mathfrak{M}} \Diamond\varphi \;\;:\Longleftrightarrow\;\; \exists y \sqsupset x \, (y \Vdash^{\mathsf{K}}_{\mathfrak{M}} \varphi)$

Int では R を任意の推移的・反射的な関係 $\leq$ とする.

また V に以下の条件を課す:

$$x \leq x' \;\&\; x \in V(p) \implies x' \in V(p)$$

Definition

上を満たすものを <u>直観主義フレーム・モデル</u> と呼ぶことにする

Definition (Int-Satisfaction Relation)

直観主義モデル $\mathfrak{M} = (W, \leq, V)$ に対し，$\Vdash^{\mathsf{Int}}_{\mathfrak{M}}$ を以下で定める:

$$x \Vdash^{\mathsf{Int}}_{\mathfrak{M}} \varphi \to \psi \;\;:\Longleftrightarrow\;\; \forall x' \geq x\, (x' \Vdash^{\mathsf{Int}}_{\mathfrak{M}} \varphi \Rightarrow x' \Vdash^{\mathsf{Int}}_{\mathfrak{M}} \psi)$$

Fact (Persistency)

$$x \leq x' \;\&\; x \Vdash^{\mathsf{Int}}_{\mathfrak{M}} \varphi \implies x' \Vdash^{\mathsf{Int}}_{\mathfrak{M}} \varphi.$$

K と Int の完全性

Definition (Validity)

- $\mathfrak{M} \vDash^{\bullet} \varphi \;:\Longleftrightarrow\; \forall x \in W \, (x \Vdash^{\bullet}_{\mathfrak{M}} \varphi)$
- $\mathfrak{F} \vDash^{\bullet} \varphi \;:\Longleftrightarrow\; \forall V \, ((\mathfrak{F}, V) \vDash^{\bullet} \varphi)$
- Kripke フレームのクラス $\mathscr{C}$ に対して，
$$\mathcal{V}(\Vdash^{\bullet}, \mathscr{C}) := \{\varphi \mid \forall \mathfrak{F} \in \mathscr{C} \, (\mathfrak{F} \vDash^{\bullet} \varphi)\}$$

Fact (Completeness)

- $\mathbf{K} = \mathcal{V}(\Vdash^{\mathsf{K}}, \mathscr{C}_{\mathsf{K}})$. $\mathscr{C}_{\mathsf{K}}$ は Kripke フレーム全体のクラス．
- $\mathbf{Int} = \mathcal{V}(\Vdash^{\mathsf{Int}}, \mathscr{C}_{\mathsf{Int}})$. $\mathscr{C}_{\mathsf{Int}}$ は直観主義フレーム全体のクラス．

Definition

述語 $\sqsubset$ と述語 V_p ($p \in \mathrm{PropVar}$) を持つ一階言語 $\mathscr{L}_{\mathrm{ST}}$ を考える．
$\varphi \in \mathscr{L}_{\Box\Diamond}$ と自由変数 x に対して $\mathrm{ST}_x(\varphi) \in \mathscr{L}_{\mathrm{ST}}$ を以下で定める．

- $\mathrm{ST}_x(\bot) = \bot$, $\mathrm{ST}_x(p) = V_p(x)$
- $\mathrm{ST}_x(\psi_1 \circledcirc \psi_2) = \mathrm{ST}_x(\psi_1) \circledcirc \mathrm{ST}_x(\psi_2)$ ($\circledcirc \in \{\wedge, \vee, \to\}$)
- $\mathrm{ST}_x(\Box\psi) = \forall y\, (x \sqsubset y \to \mathrm{ST}_y(\psi))$ (y: fresh)
- $\mathrm{ST}_x(\Diamond\psi) = \exists y\, (x \sqsubset y \wedge \mathrm{ST}_y(\psi))$ (y: fresh)

Fact

$\mathbf{K} \vdash \varphi \iff$ 全ての古典 $\mathscr{L}_{\mathrm{ST}}$-構造で $\forall x\, \mathrm{ST}_x(\varphi)$ が妥当

Intuitionistic Modal Logic と
Constructive Modal Logic

K の直観主義版を考えたい．そのモデルは Kripke モデルと直観主義モデルの fusion となるだろう．

Definition

$\mathfrak{M} = (W, \leq, \sqsubset, V)$ が以下を満たすとき Fusion モデル と呼ぶ:

- $(W, \leq, V)$ が直観主義モデル，すなわち $\leq$ は推移的かつ反射的で，$x \leq x'$ & $x \in V(p) \Rightarrow x' \in V(p)$.
- $(W, \sqsubset, V)$ が Kripke モデル．

Fusion フレームについても同様に定める．

これに対しても充足可能性を定めたい．

Extrinsic Satisfaction Relation (1/2)

まず素朴に $\Vdash^{\mathsf{K}}$ と $\Vdash^{\mathsf{Int}}$ を組み合わせたものを考えよう．

Definition (Extrinsic Satisfaction Relation)

$\mathfrak{M} = (W, \leq, \sqsubset, V)$ を Fusion モデルとする．

- $x \Vdash^{\mathsf{e}}_{\mathfrak{M}} \varphi \to \psi \;:\Longleftrightarrow\; \forall x' \geq x\,(x' \Vdash^{\mathsf{e}}_{\mathfrak{M}} \varphi \Rightarrow x' \Vdash^{\mathsf{e}}_{\mathfrak{M}} \psi)$
- $x \Vdash^{\mathsf{e}}_{\mathfrak{M}} \Box\varphi \;:\Longleftrightarrow\; \forall y \sqsupset x\,(y \Vdash^{\mathsf{e}}_{\mathfrak{M}} \varphi)$
- $x \Vdash^{\mathsf{e}}_{\mathfrak{M}} \Diamond\varphi \;:\Longleftrightarrow\; \exists y \sqsupset x\,(y \Vdash^{\mathsf{e}}_{\mathfrak{M}} \varphi)$

$\Vdash^{\mathsf{e}}$ は必ずしも persistency を持たず，別途 $\mathfrak{M}$ にフレーム条件を加えてやる必要がある（次頁）．persistency をフレーム条件で外付けするので 外部的充足可能性 (extrinsic–) と呼ぶことにする．

Extrinsic Satisfaction Relation (2/2)

$\Vdash^{\mathsf{e}}$ は必ずしも persistency を持たず，別途 $\mathfrak{M}$ にフレーム条件を加えてやる必要がある．

$$\begin{tikzcd}
x' \arrow[r, squiggly, "\sqsubset"] & y' \\
x \arrow[u, "\leq"] \arrow[r, dashed, squiggly, "\sqsubset"'] & \exists y \arrow[u, dashed, "\leq"']
\end{tikzcd}$$

$\Box$-p 条件

$$\begin{tikzcd}
x' \arrow[r, dashed, squiggly, "\sqsubset"] & \exists y' \\
x \arrow[u, "\leq"] \arrow[r, squiggly, "\sqsubset"'] & y \arrow[u, dashed, "\leq"']
\end{tikzcd}$$

$\Diamond$-p 条件

$\Box$-p 条件が $\Box\varphi$ の形の論理式の persistency を，
$\Diamond$-p 条件が $\Diamond\varphi$ の形の論理式の persistency を保証する．

Intrinsic Satisfaction Relation

フレーム条件で外付けするのではなく，充足可能性の定義自体を変えることで persistency を内蔵するアプローチもあり，これを内部的充足可能性 (intrinsic–) と呼ぶことにする．

Definition (Intrinsic Satisfaction Relation)

$\mathfrak{M} = (W, \leq, \sqsubset, V)$ を Fusion モデルとする．

- $x \Vdash^{\mathsf{i}}_{\mathfrak{M}} \varphi \to \psi \;\; :\Longleftrightarrow \;\; \forall x' \geq x \, (x' \Vdash^{\mathsf{i}}_{\mathfrak{M}} \varphi \Rightarrow x' \Vdash^{\mathsf{i}}_{\mathfrak{M}} \psi)$
- $x \Vdash^{\mathsf{i}}_{\mathfrak{M}} \Box\varphi \;\; :\Longleftrightarrow \;\; \forall x' \geq x \, \forall y' \sqsupset x' \, (y' \Vdash^{\mathsf{i}}_{\mathfrak{M}} \varphi)$
- $x \Vdash^{\mathsf{i}}_{\mathfrak{M}} \Diamond\varphi \;\; :\Longleftrightarrow \;\; \forall x' \geq x \, \exists y' \sqsupset x' \, (y' \Vdash^{\mathsf{i}}_{\mathfrak{M}} \varphi)$

$\Box / \Diamond$ でも直観主義側の到達可能関係 $\leq$ を見ることによって，何もフレーム条件を加えなくても persistency が保証される．

Intrinsic vs. Extrinsic

$\Vdash^{e}$ と $\Vdash^{i}$ がそれぞれ妥当とする論理式の集合は 一致しない.

Definition

- $\mathscr{C}_{\mathsf{f}}$: Fusion フレーム全体のクラス.
- $\mathscr{C}_{\text{box-p}}$: $\Box$-p 条件を満たす Fusion フレーム全体のクラス.
- $\mathscr{C}_{\text{dia-p}}$: $\Diamond$-p 条件を満たす Fusion フレーム全体のクラス.

Fact

$$\mathcal{V}(\Vdash^{i}, \mathscr{C}_{\mathsf{f}}) \subsetneq \mathcal{V}(\Vdash^{e}, \mathscr{C}_{\text{box-p}} \cap \mathscr{C}_{\text{dia-p}}).$$

例えば以下の論理式が右辺に含まれ，また左辺に含まれない:

- $\mathsf{C}_{\Diamond} : \Diamond(\varphi \vee \psi) \to (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi)$
- $\neg\neg\Box\bot \to \Box\bot$ (Das and Marin 2023)

Wijesekera, Mendler & de Paiva らは構成主義の観点から $\mathsf{C}_\Diamond$ 自体を疑問視し，Constructive Modal Logic (CML) を作った．
代表的な CML として **CK** (今回は触れない) や **WK** がある:

Definition (WK)

$$\mathbf{WK} := \mathbf{Int} + \mathsf{M}_\Box + \mathsf{N}_\Box + \mathsf{C}_\Box + \mathsf{M}_\Diamond + \mathsf{N}_\Diamond + \mathsf{FS1}.$$

ここで $\mathsf{FS1} := \Diamond(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Diamond\psi)$.

彼らは $\Vdash^{\mathsf{i}}$ を充足可能性として採用した．

Fact (Wijesekera 1990)

$$\mathbf{WK} = \mathcal{V}(\Vdash^{\mathsf{i}}, \mathscr{C}_{\mathsf{f}}).$$

一方 Fischer Servi, Ewald, Plotkin & Stirling, Simpson らは「真の直観主義版 **K**」といえるものを追い求めた.

Simpson は特に直観主義一階述語論理 (iFOL) との対応を重視し，$\Box$ には $\forall$ 的な, $\Diamond$ には $\exists$ 的な性質を求めた.

- $\Box$ と $\Diamond$ が独立 (not interdefinable) であるべきで，つまり $\mathrm{Dual}_{\Box}$ も $\mathrm{Dual}_{\Diamond}$ も定理として持つべきでない.
- 排中律を加えると古典版の **K** が得られるべき.
- 標準翻訳で iFOL とぴったり対応するべきで，少なくとも $\Box\neg\varphi \leftrightarrow \neg\Diamond\varphi$ と $\Diamond\neg\varphi \to \neg\Box\varphi$ を定理として持つべき.

さらに 3 つの条件 * を加えたものを Simpson の 6 条件 と呼ぶ.

*今回登場する論理は全て満たすので特に触れない

Simpson は以下の理由から「**WK** は真の直観主義版 **K** とはいえない」と批判した:

- **WK** $\nvdash \neg\Diamond\varphi \to \Box\neg\varphi$ である．
- **WK** に排中律を加えても古典版の **K** が得られない．

一方 Simpson の 6 条件をすべて満たす論理として **IK** がある:

Definition

$$\mathbf{IK} := \mathbf{WK} + \mathrm{C}_\Diamond + \mathrm{FS2}.$$

ここで $\mathrm{FS2} := (\Diamond\varphi \to \Box\psi) \to \Box(\varphi \to \psi)$.

IK やその拡張は Intuitionistic Modal Logic (IML) と呼ばれる．

Intuitionistic Modal Logic (2/3)

FS2 : $(\Diamond\varphi \to \Box\varphi) \to \Box(\varphi \to \psi)$ がまさに $\neg\Diamond\varphi \to \Box\neg\varphi$ に必要な公理で，これは以下のフレーム条件に対応する．

$$
\begin{tikzcd}
\exists x' \arrow[r, dashed, rightsquigarrow, "\sqsubset"] & y' \\
x \arrow[u, dashed, "\leq"] \arrow[r, rightsquigarrow, "\sqsubset"'] & y \arrow[u, "\leq"']
\end{tikzcd}
$$

Definition

$\mathscr{C}_{\mathsf{fs2}}$: 上を満たす Fusion フレーム全体のクラス．

Intuitionistic Modal Logic (3/3)

そして彼らは $\Box$ については persistency を内蔵し，
$\Diamond$ についてはフレーム条件で persistency を外付けする，
$\Vdash^{\mathsf{i}}$ と $\Vdash^{\mathsf{e}}$ のハイブリッドのような充足可能性を用いた．

Definition (Hybrid Satisfaction Relation)

$\mathfrak{M} = (W, \leq, \sqsubset, V)$ を Fusion モデルとする．

- $x \Vdash^{\mathsf{h}}_{\mathfrak{M}} \varphi \to \psi \;:\Longleftrightarrow\; \forall x' \geq x \, (x' \Vdash^{\mathsf{h}}_{\mathfrak{M}} \varphi \Rightarrow x' \Vdash^{\mathsf{h}}_{\mathfrak{M}} \psi)$
- $x \Vdash^{\mathsf{h}}_{\mathfrak{M}} \Box\varphi \;:\Longleftrightarrow\; \forall x' \geq x \, \forall y' \sqsupset x' \, (y' \Vdash^{\mathsf{h}}_{\mathfrak{M}} \varphi)$
- $x \Vdash^{\mathsf{h}}_{\mathfrak{M}} \Diamond\varphi \;:\Longleftrightarrow\; \exists y \sqsupset x \, (y \Vdash^{\mathsf{h}}_{\mathfrak{M}} \varphi)$

Fact (Fischer Servi 1984, Simpson 1994)

$$\mathbf{IK} = \mathcal{V}(\Vdash^{\mathsf{h}}, \mathscr{C}_{\mathsf{fs2}} \cap \mathscr{C}_{\mathsf{dia\text{-}p}}).$$

	WK	**IK**
充足可能性 フレームのクラス	$\Vdash^{\mathsf{i}}$ $\mathscr{C}_{\mathsf{f}}$	$\Vdash^{\mathsf{h}}$ $\mathscr{C}_{\mathsf{fs2}} \cap \mathscr{C}_{\mathsf{dia\text{-}p}}$
$\mathrm{C}_{\Diamond}$ を	もたない	もつ
$\Box$ と $\Diamond$ が $\neg\Diamond\varphi \to \Box\neg\varphi$ が 排中律で **K** に	独立 示せない ならない	独立 示せる なる

- 構成主義の観点から公理 $\mathrm{C}_{\Diamond}$ を疑問視する ➡ CML
- 標準翻訳で iFOL と対応することを重視する ➡ IML
- 両者の要求は両立しない
- 一般に IML は CML の拡張になる (e.g. **WK** $\subsetneq$ **IK**)

直観主義様相論理の状況を見た上で，以下の疑問が浮かぶ:

Problem

古典様相論理に慣れていると，$\Vdash^{\mathsf{e}}$ ではなぜダメなのかと思う．
論理 $\mathcal{V}(\Vdash^{\mathsf{e}}, \mathscr{C}_{\text{box-p}} \cap \mathscr{C}_{\text{dia-p}})$ は実際どうなっていて，
本当に Simpson の 6 条件を満たさないのか？

Problem

$\Vdash^{\mathsf{h}}$ の persistency には $\Diamond$-p 条件だけあればよいはず．
論理 $\mathcal{V}(\Vdash^{\mathsf{h}}, \mathscr{C}_{\text{dia-p}})$ は実際どうなっているのか？

これらの論理を調べると，<u>IML とも CML とも言いがたい</u>ことが分かった．

IML でも CML でもない論理

実は $\Box$-p 条件を満たすモデルでは $\Vdash^{\mathsf{h}}$ と $\Vdash^{\mathsf{e}}$ が同値になる:

Proposition

$\mathfrak{M} = (W, \leq, \sqsubset, V)$ が $\Box$-p と $\Diamond$-p を満たすならば，
任意の $x \in W$, $\varphi \in \mathscr{L}_{\Box\Diamond}$ で $x \Vdash^{\mathsf{h}}_{\mathfrak{M}} \varphi \iff x \Vdash^{\mathsf{e}}_{\mathfrak{M}} \varphi$.

Corollary

$$\mathcal{V}(\Vdash^{\mathsf{e}}, \mathscr{C}_{\text{box-p}} \cap \mathscr{C}_{\text{dia-p}}) = \mathcal{V}(\Vdash^{\mathsf{h}}, \mathscr{C}_{\text{box-p}} \cap \mathscr{C}_{\text{dia-p}}).$$

よってまず $\mathcal{V}(\Vdash^{\mathsf{h}}, \mathscr{C}_{\text{dia-p}})$ を公理化し，カノニカルモデルを与えて議論してから，そこに何か公理を足すことで，カノニカルモデルに $\Box$-p 条件を強制できないか考えることにした．

IK から公理 FS2 を取り除いて得られる論理 $\mathbf{IK}^- := \mathbf{WK} + \mathrm{C}_\Diamond$ がいかにも $\mathcal{V}(\Vdash^{\mathsf{h}}, \mathscr{C}_{\text{dia-p}})$ の公理化になっていそうだが，実はそうではないことが最近 Balbiani et al. によって示された．

Definition

$$\mathbf{FIK} := \mathbf{IK}^- + \mathrm{wCD}.$$

ここで $\mathrm{wCD} := \Box(\varphi \vee \psi) \to ((\Diamond\varphi \to \Box\psi) \to \Box\psi)$.

Theorem (Balbiani et al. 2024)

$$\mathbf{FIK} = \mathcal{V}(\Vdash^{\mathsf{h}}, \mathscr{C}_{\text{dia-p}}).$$

Proof.

$(\subseteq)$ 簡単．$(\supseteq)$ カノニカルモデルを与える． $\square$

FIK (2/2)

FIK は **IK** より真に弱い論理になる:

Proposition (Balbiani et al. 2024)

$$\textbf{FIK} \subsetneq \textbf{IK}.$$

公理 wCD は公理 FS2 を弱めたものといえる.

さらに以下が成立する.

Proposition (Balbiani et al. 2024)

FIK に排中律を加えると **K** が得られる.

Proposition (S.)

$$\textbf{FIK} \nvdash \neg\Diamond\varphi \to \Box\neg\varphi.$$

よって **FIK** は標準翻訳で iFOL と対応しないことになる.

Balbiani らの **FIK** と，そのカノニカルモデルの構成を元にして，$\mathcal{V}(\Vdash^{\mathsf{e}}, \mathscr{C}_{\text{box-p}} \cap \mathscr{C}_{\text{dia-p}})$ の公理化を得ることができた．

Definition

$$\mathbf{eIK}^- := \mathbf{IK}^- + \mathrm{CD}.$$

ここで $\mathrm{CD} := \Box(\varphi \vee \psi) \to (\Diamond\varphi \vee \Box\psi)$.

Theorem (S.)

$$\mathbf{eIK}^- = \mathcal{V}(\Vdash^{\mathsf{e}}, \mathscr{C}_{\text{box-p}} \cap \mathscr{C}_{\text{dia-p}}).$$

Proof.

まずカノニカルモデルを用いて $\mathbf{eIK}^- = \mathcal{V}(\Vdash^{\mathsf{h}}, \mathscr{C}_{\text{box-p}} \cap \mathscr{C}_{\text{dia-p}})$ を示す．そして $\Box$-p を満たすモデルで $\Vdash^{\mathsf{h}}$ と $\Vdash^{\mathsf{e}}$ が一致することを使う． $\Box$

公理 CD: $\Box(\varphi \vee \psi) \to (\Diamond\varphi \vee \Box\psi)$ は明らかに公理 wCD: $\Box(\varphi \vee \psi) \to ((\Diamond\varphi \to \Box\psi) \to \Box\psi)$ の強化で，以下が示せる．

Proposition (S.)

$$\mathbf{FIK} \subsetneq \mathbf{eIK}^-.$$

しかし公理 FS2 : $(\Diamond\varphi \to \Box\varphi) \to \Box(\varphi \to \psi)$ とは比較不能．

Proposition (S.)

$\mathbf{eIK}^- \subseteq \mathbf{IK}$ でも $\mathbf{IK} \subseteq \mathbf{eIK}^-$ でもない．

その他の性質については，概ね **FIK** と同様になっている．

Proposition (S.)

- $\mathbf{eIK}^-$ に排中律を加えると **K** が得られる．
- $\mathbf{eIK}^- \nvdash \neg\Diamond\varphi \to \Box\neg\varphi$.

結論 (1/2)

	WK	**FIK**	**IK**	**eIK**$^{-}$
充足可能性 フレームのクラス	$\Vdash^{\mathrm{i}}$ $\mathscr{C}_{\mathrm{f}}$	$\Vdash^{\mathrm{h}}$ $\mathscr{C}_{\text{dia-p}}$	$\Vdash^{\mathrm{h}}$ $\mathscr{C}_{\text{fs2}} \cap \mathscr{C}_{\text{dia-p}}$	$\Vdash^{\mathrm{e}}$ $\mathscr{C}_{\text{box-p}} \cap \mathscr{C}_{\text{dia-p}}$
$\mathrm{C}_{\Diamond}$ を	もたない	もつ	もつ	もつ
$\Box$ と $\Diamond$ が $\neg\Diamond\varphi \to \Box\neg\varphi$ が 排中律で **K** に	独立 示せない ならない	独立 示せない なる	独立 示せる なる	独立 示せない なる

FIK と **eIK**$^{-}$ は $\mathrm{C}_{\Diamond}$ をもつという意味で CML とは言えない．一方 $\neg\Diamond\varphi \to \Box\neg\varphi$ が示せず，よって標準翻訳で iFOL と対応しないので，その意味で IML とも言えない．

結論 (2/2)

- CML の要求も IML の条件も満たさない論理 **FIK** が，ちょうど **WK** と **IK** の間に割って入るようにして存在する．
- $\Box$ と $\Diamond$ を古典様相論理と同様に $\sqsubset$ のみで評価すると，
IK と比較不能な **FIK** の拡張である $\mathbf{eIK}^-$ が得られ，
同様に CML の要求も IML の条件も満たさない．
- Simpson の 6 条件では「排中律を加えて **K** が得られる」と「標準翻訳で iFOL と対応する」が分けられているが，
実際に前者のみしか満たさない non-artificial な例が取れた．

ありがとうございました

cannorin.net/math/mlg60.pdf

参考文献

参考文献

今回の発表は，未発表のサーベイ論文を元にしている．

- Gisèle Fischer Servi. Axiomatizations for some intuitionistic modal logics. *Rendiconti del Seminario Matematico*, 42(3):179–194, 1984.
- Duminda Wijesekera. Constructive modal logics I. *Annals of Pure and Applied Logic*, 50(3):271–301, 1990.
- Alex K. Simpson. The Proof Theory and Semantics of Intuitionistic Modal Logic. PhD thesis, University of Edinburgh, 1994.
- Michael Mendler and Valeria de Paiva. Constructive CK for Contexts. *Context Representation and Reasoning*, 13, 2005.
- Anupam Das and Sonia Marin. On Intuitionistic Diamonds (and Lack Thereof). *Automated Reasoning with Analytic Tableaux and Related Methods*, 14278:283–301, 2023.
- Philippe Balbiani, Han Gao, Çiğdem Gencer, and Nicola Olivetti. A Natural Intuitionistic Modal Logic: Axiomatization and Bi-Nested Calculus. *LIPIcs*, 88:13:1–13:21, 2024.